Colegiul Naţional „Constantin Carabella” Târgovişte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”

Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018

CLASA a V-a

Subiectul 1. Împărțind un număr natural de 4 cifre la răsturnatul său, obținem câtul 4 și restul 30. Să se afle numărul, știind că diferența dintre cifra miilor și cea a unităților este 6, iar diferența dintre cifra sutelor și cea a zecilor este 1.

Subiectul 2. a)Câte numere naturale cel mult egale cu 2018 există, în scrierea cărora apare o singură cifră de 9? Justificați răspunsul.

b)Se consideră numărul 12345678910111213 ... 201620172018. Să se scrie cel mai mare număr pe care îl puteți obține dacă se elimină 20 de cifre.Justificați răspunsul.

Subiectul 3. Cei 30 de elevi ai unei clase au obținut la o lucrare scrisă următoarele note: 12 elevi au obținut 10 sau 9, 20 de elevi au obținut 9 sau 8, 15 elevi au obținut 8 sau 7, 5 elevi au obținut 7 sau 6. Câți elevi au obținut nota 10? Care este media obținută de elevii clasei la această lucrare?

Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.

Subiecte propuse de prof.Mihaela Gabor, C.N.C.Carabella Târgoviște

Colegiul Naţional „Constantin Carabella” Târgovişte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”

Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018

CLASA a VI-a

Subiectul 1. Să se împartă un dreptunghi cu laturile 25 cm și 36 cm, în două părți, astfel încât din ele să se poată construi un pătrat.

Subiectul 2. Suma unui număr impar de numere întregi consecutive este 2018. Aflați-le pe cel mai mare și cel mai mic dintre ele.

Subiectul 3. Se consideră triunghiul isoscel ABC în care $\hat{B} = \hat{C} = 70°$. Pe laturile AB și AC se consideră punctele F respectiv E astfel ca $\widehat{ABE} = 15°, \widehat{ACF} = 30°$. Să se afle măsura unghiului $\widehat{AEF}$.

Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.

Colegiul Naţional „Constantin Carabella" Târgovişte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Concursul de Matematică "Cezar Ivănescu"

Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018

CLASA a VII-a

Subiectul 1. a) Demonstrați că numărul $(a-6)(a-4)(a-2)a+16$ este pătrat perfect.

b) calculați partea întreagă a numărului $\frac{N}{2012}$, dacă $N=\sqrt{2012\cdot2014\cdot2016\cdot2018+16}$.

Subiectul 2. Fie $ABCD$ un dreptunghi. O dreaptă oarecare taie dreptele AB, BC, CD, DA în punctele M, N, P respectiv Q. Arătați că suma $\frac{AB^2}{NQ^2}+\frac{BC^2}{MP^2}$ este constantă.

Subiectul 3. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}$. Calculați expresia $E=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.

Subiecte propuse de prof.Mihaela Gabor şi Ligia Ion, C.N.C.Carabella Târgovişte

Colegiul Naţional „Constantin Carabella" Târgovişte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Concursul de Matematică "Cezar Ivănescu"

Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018

CLASA a VIII-a

Subiectul 1. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât numărul $n = \frac{a}{a+d} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+d}$ să fie natural.

a) Arătați că numărul $m = \frac{d}{a+d} + \frac{d}{b+d} + \frac{d}{c+d}$ este natural.
b) Calculați $|m - n|$.
c) Dați exemplu de numere $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*, a, b, c$ distincte, pentru care n este natural.

Subiectul 2. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și M un punct în interiorul său astfel ca $MD = a$, $MA = MB = MC = a\sqrt{3}, a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculați volumul tetraedrului.

Subiectul 3. Într-un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c este verificată relația:

$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 2\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{b+a}\right)$. Arătați că paralelipipedul este cub.

Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.

Subiecte propuse de prof.Mihaela Gabor și Ligia Ion, C.N.C.Carabella Târgoviște

Colegiul Naţional „Constantin Carabella" Târgovişte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Concursul de Matematică "Cezar Ivănescu"

Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 05 mai 2018

CLASA a IX-a

Subiectul 1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetica neconstanta cu $a_1 = 1$, cu proprietatea ca pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, expresia

$$\frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

nu depinde de n (este constanta in raport cu n). Determinati a_{15}.

Subiectul 2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir cu proprietatea ca:

$$\frac{1}{1+x_n} + \frac{1}{1+2x_{n-1}} + \cdots + \frac{1}{1+nx_1} = \frac{n}{2},$$

oricare ar fi $n \geq 1$. Demonstrați ca

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \cdots + \frac{x_n}{n+1} < 1,$$

oricare ar fi $n \geq 1$.

Cristinel Mortici

Subiectul 3. . Fie [AD bisectoarea unghiului A a triunghiului ABC, D∈(BC). Dacă AB<AC și E este proiecția lui B pe (AD). Determinați numerele reale x, y, z pentru care

$$\overrightarrow{r_E} = x\overrightarrow{r_A} + y\overrightarrow{r_B} + z\overrightarrow{r_C}.$$

Se notează $BC = a, AC = b, AB = c$.

Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.

Colegiul Naţional „Constantin Carabella" Târgovişte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Concursul de Matematică "Cezar Ivănescu"

Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 05 mai 2018

CLASA a X-a

Subiectul 1. Să se rezolve in numere reale ecuațiile:

a) $\cos^2 x+\cos^2[x]+\cos^2\{x\}=1$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x și $\{x\}$ este partea fracționară a lui x;

b) $x^3-2=3\sqrt[3]{3x+2}$.

R.M.T.

Subiectul 2. Pentru fiecare $n\in N$, definim funcția $f:[1,\infty)\to R$, prin

$f(x)=(2^x+3^x)(4^x+5^x)-n(2^x+3^x+4^x+5^x)$.

Demonstrați că:

a) pentru $n=2$, funcția f obținută este crescătoare;
b) există un număr finit de valori naturale ale lui n pentru care funcția f obținută este crescătoare.

Cristinel Mortici

Subiectul 3. Fie a, b, c numere complexe nenule cu $|a|=|b|=|c|$. Să se arate că dacă ecuația $ax^2+bx+c=0$ are o soluție de modul 1, atunci $b^2=ac$.

R.M.T.

Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.

Colegiul Naţional „Constantin Carabella” Târgovişte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”

Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 05 mai 2018

CLASA a XI-a

Subiectul 1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Arătați că pentru orice permutare $\sigma \in S_n$, avem:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2\sigma(k)} \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Subiectul 2. Arătați că nu există funcții derivabile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(0) = 0$ și

$f(x) \geq |x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Cristinel Mortici

Subiectul 3. Un călugăr pleacă într-o dimineata la ora 8 de la o mânăstire de la poalele unui munte și ajunge la o mânăstire situată în vârful muntelui la ora 12. A doua zi, se întoarce pe același traseu, pornind la ora 8 dimineața de la mânăstirea din vârful muntelui și ajunge la mânăstirea de la poalele muntelui la ora 12.
Demonstrați că există un loc pe traseu prin care călugărul trece la aceeași ora în ambele zile (între 8 si 12).

Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.

Colegiul Naţional „Constantin Carabella" Târgovişte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Concursul de Matematică "Cezar Ivănescu"

Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 05 mai 2018

CLASA a XII-a

Subiectul 1. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, avem:

$$\int_{1+\frac{1}{n}}^{n} \frac{1+\ln x}{(x+\ln x)^2} dx < \frac{1}{2}\ln\ n + \frac{1}{4}\ln(\ln\ n).$$

Cristinel Mortici

Subiectul 2. Dacă $f: [0,1] \rightarrow R$ este o funcție continuă și $\int_0^1 f(x)dx = 1$, atunci există $c\epsilon(0,1)$ astfel încât

$$f(c) = 2c$$

Subiectul 3. Să se demonstreze că într-un grup *G* cu *2n* elemente, unde *n* este număr impar, există cel mult *n* elemente de ordinul 2.

Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.