Concursul de Matematică"Cezar Ivănescu"
Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018
Barem orientativ - clasa a V-a

Subiectul 1. Împărțind un număr natural de 4 cifre la răsturnatul său, obținem câtul 4 și restul 30. Să se afle numărul, știind că diferența dintre cifra miilor și cea a unităților este 6, iar diferența dintre cifra sutelor și cea a zecilor este 1.

Fie $N = \overline{abcd} \Rightarrow \overline{dcba}$ răsturnatul său......1p

$\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1000a + 100b + 10c + d - 1000d - 100c - 10b - a$......2p

$= 999a + 90b - 90c - 999d = 999(a-d) + 90(b-c)$......1p

$= 999 \cdot 6 + 90 \cdot 1 = 6084$......1p

$\overline{abcd} = \overline{dcba} \cdot 4 + 30$......1p

$\overline{dcba} \cdot 4 + 30 - \overline{dcba} = 6084$......1p

$\overline{dcba} = 2018 \Rightarrow \overline{abcd} = 8102$......2p

Oficiu......1p

Subiectul 2. a)Câte numere naturale cel mult egale cu 2018 există, în scrierea cărora apare o singură cifră de 9? Justificați răspunsul.

b)Se consideră numărul 12345678910111213 ... 201620172018. Să se scrie cel mai mare număr pe care îl puteți obține dacă se elimină 20 de cifre.Justificați răspunsul.

a)Numere cu o cifră, doar unul singur......1p

Numere cu 2 cifre sunt 17......1p

Numere cu 3 cifre sunt 225......1p

Numere cu 4 cifre sunt 244......1p

Total 487......1p

b)Se elimină cifrele 1,2,3,4,5,6,7,8,se păstrează 9......1p

se elimină 1,0,1,1,1,2,1,3,1,4,1,se păstrează 5......1p

se elimină 1......1p

956171819...201620172018......1p

Oficiu......1p

Subiectul 3. Cei 30 de elevi ai unei clase au obținut la o lucrare scrisă următoarele note: 12 elevi au obținut 10 sau 9, 20 de elevi au obținut 9 sau 8, 15 elevi au obținut 8 sau 7, 5 elevi au obținut 7 sau 6. Câți elevi au obținut nota 10? Care este media obținută de elevii clasei la această lucrare?

$$\left.\begin{array}{r} n_{10} + n_9 = 12 \\ n_9 + n_8 = 20 \\ n_8 + n_7 = 15 \\ n_7 + n_6 = 5 \end{array}\right\}$$ 2p

$\underbrace{n_{10} + n_9}_{12} + \underbrace{n_8 + n_7}_{15} + n_6 = 30$......2p

$n_6 = 3, n_7 = 2, n_8 = 13, n_9 = 7,$......2p

$n_{10} = 5$......1p

Media $m = \frac{10\cdot5+9\cdot7+8\cdot13+7\cdot2+6\cdot3}{30} = 8{,}30$......2p

Oficiu......1p

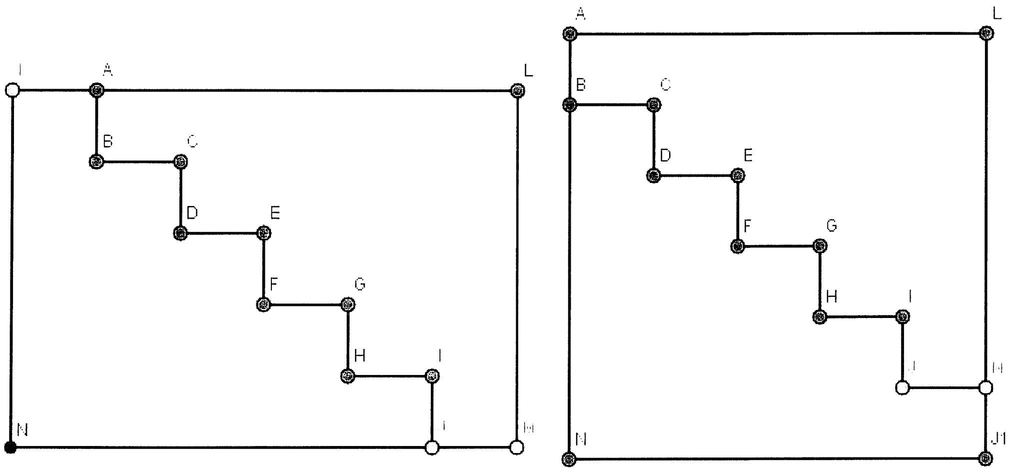
Concursul de Matematică"Cezar Ivănescu"
Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018
Barem orientativ - clasa a VI-a

Subiectul 1. Să se împartă un dreptunghi cu laturile 25 cm și 36 cm, în două părți, astfel încât din ele să se poată construi un pătrat.

Aria dreptunghiului este $900cm^2$ 1p

Aria pătratului este 900 cm^2 deci latura sa trebuie să fie 30 cm 1p

Se împarte dreptunghiul mare în 30 de dreptunghiuri cu dimensiunile 5 și 6 cm 1p



Se decupează după linia ABCDEFGHIJ, se deplasează în jos 5 cm și spre dreapta 6 cm și se lipesc ca în figură.. 6p

oficiu........... 1p

Subiectul 2. Suma unui număr impar de numere întregi consecutive este 2018. Aflați-le pe cel mai mare și cel mai mic dintre ele.

Fie $x, x+1, x+2, \dots x+2k$ cele $2k+1$ numere întregi consecutive....................................... 2p

$(2k+1)x + 1 + 2 + 3 + \cdots + 2k = 2018$.. 1p

$(2k+1)x + \frac{2k(2k+1)}{2} = 2018$.. 1p

$(2k+1)(x+k) = 2018$... 1p

Singura posibilitate este $2k+1 = 1009$ și $x + k = 2$.. 1p

$k = 504$.. 1p

$x = -502$ cel mai mic.. 1p

506 cel mai mare 1p

oficiu......... 1p

Subiectul 3. Se consideră triunghiul isoscel ABC în care $\hat{B} = \hat{C} = 70°$. Pe laturile AB și AC se consideră punctele F respectiv E astfel ca $\widehat{ABE} = 15°, \widehat{ACF} = 30°$. Să se afle măsura unghiului $\widehat{AEF}$.

$\widehat{ABC} = 70°, \widehat{ABE} = 15° \Rightarrow \widehat{EBC} = 55°$.. 1p

$\widehat{ACB} = 70°, \widehat{ACF} = 30° \Rightarrow \widehat{BCF} = 40°$.. 1p

În triunghiul $BEC \Rightarrow \widehat{BEC} = 55° \Rightarrow EC = BC$... 2 p

În triunghiul $BFC \Rightarrow \widehat{BFC} = 70° \Rightarrow FC = BC$... 2 p

Deci triunghiul FEC isoscel.. 1p

$\widehat{CFE} = \widehat{FEC} = \frac{180° - \widehat{FCE}}{2} = 75°$... 1p

$\widehat{AEF} = 105°$.. 1p

oficiu................. 1p

Concursul de Matematică"Cezar Ivănescu"
Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018
Barem orientativ - clasa a VII-a

Subiectul 1. a) Demonstrați că numărul $(a-6)(a-4)(a-2)a+16$ este pătrat perfect.
b) calculați partea întreagă a numărului $\frac{N}{2012}$, dacă $N=\sqrt{2012\cdot 2014\cdot 2016\cdot 2018+16}$.

a) $(a-6)(a-4)(a-2)a+16=(a^2-6a)(a^2-6a+8)+16$ 2p

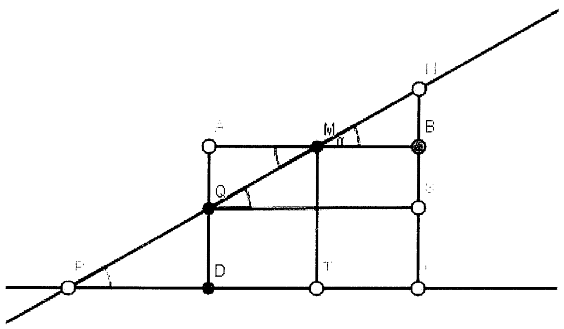
$(a^2-6a)(a^2-6a+8)+16=(a^2-6a+4)^2$ pătrat perfect 2p

b) pentru $a=2018$ obținem $N=(2018^2-6\cdot 2018+4)$............3p

$\frac{N}{2012}=2018+\frac{4}{2012}\Rightarrow\left[\frac{N}{2012}\right]=2018$............2p

oficiu............1p

Subiectul 2. Fie $ABCD$ un dreptunghi. O dreaptă oarecare taie dreptele AB, BC, CD, DA în punctele M, N, P respectiv Q. Arătați că suma $\frac{AB^2}{NQ^2}+\frac{BC^2}{MP^2}$ este constantă.



În funcție de locul în care dreapta intersectează dreptele AB, BC, CD, DA, ducem din punctele M, N, P sau Q, paralele la laturile dreptunghiului și notăm cu α unghiul format de dreaptă cu dreapta AB. În cazul figurii am dus $MT \parallel BC, QS \parallel DC$. 2p

$\frac{AB}{NQ}=\frac{QS}{NQ}=cos\alpha$ 2p

$\frac{BC}{MP}=\frac{MT}{MP}=sin\alpha$ 2p

$\frac{AB^2}{NQ^2}+\frac{BC^2}{MP^2}=sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$............3p

Oficiu............1p

Subiectul 3. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}$. Calculați expresia $E=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

Dacă $a+b+c\neq 0\Rightarrow\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$ 2p

$\Rightarrow -a+b+c=a\Rightarrow b+c=2a$............2p

$E=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{2a\cdot 2b\cdot 2c}{abc}=8$............2p

Dacă $a+b+c=0\Rightarrow b+c=-a$............1p

$E=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{-a\cdot(-b)\cdot(-c)}{abc}=-1$............2p

Oficiu............1p

Concursul de Matematică“Cezar Ivănescu”
Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018
Barem orientativ - clasa a VIII-a

Subiectul 1. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât numărul $n = \frac{a}{a+d} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+d}$ să fie natural.

a) Arătați că numărul $m = \frac{d}{a+d} + \frac{d}{b+d} + \frac{d}{c+d}$ este natural.
b) Calculați $|m - n|$.
c) Dați exemplu de numere $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*, a, b, c$ distincte, pentru care n este natural.

a) $m + n = \frac{d}{a+d} + \frac{d}{b+d} + \frac{d}{c+d} + \frac{a}{a+d} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+d} = 3$ 1p
deoarece $n \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \mathbb{N}$....................1p
b) $\left.\begin{matrix} m + n = 3 \\ m, n \in \mathbb{N}^* \end{matrix}\right\} \Rightarrow m, n \in \{1,2\}$....................2p
$\Rightarrow |m - n| = 1$....................1p
c) $a = 1, b = 2, c = 5, d = 1$....................4p
oficiu....................1p

Subiectul 2. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și M un punct în interiorul său astfel încât $MD = a,\ MA = MB = MC = a\sqrt{3}, a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculați volumul tetraedrului.

Fie x latura tetraedrului. Deoarece tetraedrul este regulat și $MA = MB = MC \Rightarrow M \in DO$, unde DO este înălțimea tetredrului....................1p
$AO = \frac{x\sqrt{3}}{3}, DO = \frac{x\sqrt{6}}{3}, MO = \frac{x\sqrt{6}}{3} - a$ (1)....................1p
Dar $MO^2 = MA^2 - AO^2 = \frac{27a^2 - 3x^2}{9}$ (2)....................1p
Din (1) și (2) se obține o ecuație de gradul doi $3x^2 - 2ax\sqrt{6} - 6a^2 = 0$....................1p
Soluția convenabilă este $x = a\sqrt{6}$....................1p
$V = \frac{S_b \cdot h}{3} = a^2\sqrt{3}$....................2p
oficiu....................1p

Subiectul 3. Într-un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c este verificată relația:

$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 2\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{b+a}\right)$. Arătați că paralelipipedul este cub.

Inegalitatea mediilor $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$ și analoagele 6p

Însumând relațiile obținem $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge 2\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{b+a}\right)$....................1p

Egalitatea se obține dacă $a = b = c$ deci paralelipipedul este cub....................2p
oficiu....................1p

Concursul de Matematică“Cezar Ivănescu”
Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018
Barem orientativ - clasa a IX-a

SUBIECTUL 1. Să notăm $f(n)=\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_2+\cdots a_n}$; $f(n)=\frac{2+(3n-1)r}{2+(n-1)r}$, $n\geq 1$ 3p

f(1)=f(2) implică *r=2* 3p

$a_{15}=29$ 3p

Oficiu 1p

SUBIECTUL 2.

$x_1=1, x_2=\frac{1}{2}, x_3=\frac{1}{3}$ 3p

Se arată prin inducţie că $x_n=\frac{1}{n}$, ...3p

$\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{3}+\cdots+\frac{x_n}{n+1}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}<1$ 3p

Oficiu 1p

SUBIECTUL 3.

BE $\cap AC=\{F\}$ şi AB=AF=c 2p

FC=b - c 1p

B, E, F coliniare ⇒ (T. Menelau) $\frac{BC}{BD}\cdot\frac{ED}{EA}\cdot\frac{FA}{FC}=1$.......... 1p

$\frac{DC}{BD}=\frac{b}{c}\Rightarrow\frac{BC}{BD}=\frac{b+c}{b}$..........1p

Fie $k=\frac{EA}{ED}=\frac{b+c}{b-c}$..........1p

$\overline{r_D}=\frac{b}{b+c}\overline{r_B}+\frac{c}{b+c}\overline{r_C}$ 1p

$\overline{r_E}=\frac{1}{1+k}\overline{r_A}+\frac{k}{1+k}\overline{r_D}=\frac{1}{1+k}\overline{r_A}+\frac{k}{1+k}\left(\frac{b}{b+c}\overline{r_B}+\frac{c}{b+c}\overline{r_C}\right)$ 1p

$x=\frac{b-c}{2b}; y=\frac{1}{2}; z=\frac{c}{2b}$ 1p

Oficiu 1p

Concursul de Matematică"Cezar Ivănescu"
Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018
Barem orientativ - clasa a X-a

SUBIECTUL 1.
Oficiu..1p

a) Scrierea ecuației sub forma echivalentă $\cos x \cdot \cos[x] \cdot \cos\{x\} = 0$.....................................3p

Analizarea fiecărui caz și determinarea mulțimii soluțiilor ecuației $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ 2p

b) Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3-2}{3}$ este bijectivă 2p

Ecuația este echivalentă cu $f(x) = f^{-1}(x)$ 1p

Soluțiile ecuației $f(x) = x$ sunt $x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 = 2$ 1p

SUBIECTUL2.
Oficiu..1p

a) Funcția $f_1: [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f_1(x) = 2^x \cdot 4^x - 2^x - 4^x = (4^x - 1)(2^x - 1) - 1$este crescătoare (produs de funcții pozitive și crescătoare)..3p

Pentru $n = 2$ funcția se poate scrie sub forma

$f(x) = (4^x - 1)(2^x - 1) + (5^x - 1)(2^x - 1) + (4^x - 1)(3^x - 1) + (5^x - 1)(3^x - 1) - 4$ este crescătoare (sumă de funcții crescătoare)..3p

b) Din $f(2) - f(1) = 488 - 40n > 0$ rezultă $n \leq 12$..3p

SUBIECTUL 3. *Oficiu*..1p

Fie $|x_1| = 1$. Din a doua relație Viète se obține $|x_2| = 1$. 2p

$\overline{x_1 + x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$..3p

Din $|a| = |b|$, rezultă $a \cdot \bar{a} = b \cdot \bar{b}$, deci $\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{a}{b}$ 3p

Finalizare...1p

Concursul de Matematică "Cezar Ivănescu"
Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018
Barem orientativ - clasa a XI-a

SUBIECTUL 1.

Notăm S(σ) $= \sum_{k=1}^{n} k^2\sigma(k)$. Fie π o permutare care realizează maximul sumei. Atunci

S(σ) $\leq S(\pi)$ pentru orice permutare σ. 2p

Fie σ=π $(i, j), i < j$. Atunci $i^2\pi(j) + j^2\pi(i) \leq i^2\pi(i) + j^2\pi(j)$ 3p

Permutarea π nu are inversiuni deci $\pi = e$ 2p

Finalizare 2p

Oficiu 1p

SUBIECTUL 2.

Presupunem că f este derivabilă în origine și atunci derivatele laterale există, sunt finite și egale..1p

Dacă *x<0*, $\frac{f(x)}{x} \leq -1$ $și$ $f'(0) \leq -1$ 3p

Dacă *x>0*, $\frac{f(x)}{x} \geq 1$ $și$ $f'(0) \geq 1$ 3p

Contradicție și finalizare 2p

Oficiu 1p

SUBIECTUL 3.

Fiecărui punct al traseului îi asociem un număr real egal cu distanța de la mânăstirea aflată la poalele muntelui la acel punct 2p

Considerăm funcțiile $f: [8,12] \rightarrow R$ $și$ $g: [8,12] \rightarrow R$, f(t)= numărul real asociat punctului în care se află călugărul la momentul t în prima zi și g(t)= numărul real asociat punctului în care se află călugărul la momentul t în a doua zi. 2p

Funcțiile f și g sunt continue 1p

Funcția h=f-g are proprietatea lui Darboux și se anulează într-un punct $t_0 \in (8,12)$ 2p

Finalizare 2p

Oficiu 1p

Concursul de Matematică "Cezar Ivănescu"
Ediţia a XIX-a, Târgovişte, 5 mai 2018
Barem orientativ - clasa a XII-a

SUBIECTUL 1.

$\int_{1+\frac{1}{n}}^{n}\frac{1+lnx}{(x+\ln x)^2}dx < \frac{1}{4}\int_{1+\frac{1}{n}}^{n}\frac{1+lnx}{xlnx}dx =$ 2p

$=\frac{1}{4}(\ln(xlnx)/_{1+\frac{1}{n}}^{n}=$ 2p

$<\frac{1}{4}(\ln(n\ln n)+\ln n) =$ 3p

$=\frac{1}{4}\ln(n^2\ln n)=$ 1p

$=\frac{1}{2}\ln n+\frac{1}{4}\ln(\ln n)$ 1p

Oficiu 1p

SUBIECTUL 2. Fie $F:[0,1]\to R, F(x)=\int_0^x f(t)dt$

Funcția $g: R\to R, g(x)=F(x)-x^2$ 1p

g îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle pe [0,1] 3p

Există $c\in(0,1)$ astfel ca $g'(c)=0$ 3p

Finalizare 2p

Oficiu 1p

Sau $\int_0^1[f(x)-2x]dx=0$, etc. cu un barem adaptat.

SUBIECTUL 3.

Fie $H=\{a_1,a_2,\dots\dots a_k\}$ mulțimea elementelor de ordinul 2. Presupunem k>n............2p

Dacă $i\neq j, ord(a_ia_j)\neq 2$, pentru că altfel $a_ia_j=a_ja_i$ și atunci $K=\{e,a_i,a_j,a_ia_j\}$ este subgrup, deci 4/2n. Contradicție. 3p

Fie $L=\{a_1a_2,a_1a_3,\dots\dots,a_1a_k\}$. $K\cap L=\emptyset$ 2p

$|H|\geq n+1$ și $|L|\geq n$. Contradicție 2p

Oficiu 1p